プログラミング言語論　演習問題 第３回（プログラミング言語の意味論）

平成１９年６月２８日～７月１２日　　担当：犬塚

I）ホーア論理を使ったプログラムの証明について考える。

例題：$\{x = a\}$ if $a >= 0$ then skip else $x := -x$ $\{ x = |a| \}$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ask}}{\{x = |a|\}\ \text{skip}\ \{x = |a|\}}}{\{x = a \wedge x >= 0\}\ \text{skip}\ \{x = |a|\}}\ \text{Rcs} \qquad \dfrac{\overset{\text{Aas}}{\{-x = |a|\}\ x := -x\ \{x = |a|\}}}{\{x = a \wedge x < 0\}\ x := -x\ \{x = |a|\}}\ \text{Rcs}}{\{x = a\}\ \text{if}\ x >= 0\ \text{then skip else}\ x := -x\ \{x = |a|\}}\ \text{Rif}$$

次のように書いてもよい：

1. $\{x = |a|\}$ skip $\{x = |a|\}$	Ask
2. $\{x = a \wedge x >= 0\}$ skip $\{x = |a|\}$	Rcs 1 i) $x = a \wedge x >= 0 \rightarrow x = |a|$
3. $\{-x = |a|\}$ $x := -x$ $\{x = |a|\}$	Aas
4. $\{x = a \wedge x < 0\}$ $x := -x$ $\{x = |a|\}$	Rcs 3 ii) $x = a \wedge x < 0 \rightarrow -x = |a|$
5. $\{x = a\}$ if $x >= 0$ then skip else $x := -x$ $\{x = |a|\}$	Rif 2 4

練習１　次の証明の空欄を埋めよ。

１－１　$\{x = a \wedge y = b\}$ begin $z := x$; $x := y$; $y := z$ end $\{x = b \wedge y = a\}$

証明：

1. $\{x = b \wedge z = a\}$ $y := z$ $\{x = b \wedge y = a\}$	Aas
2. $\boxed{\qquad\qquad}$ $x := y$ $\{x = b \wedge z = a\}$	Aas
3. $\{y = b \wedge x = a\}$ $z := x$ $\boxed{\qquad\qquad}$	Aas
4. $\{y = b \wedge x = a\}$ begin $z := x$; $x := y$; $y := z$ end $\{y = b \wedge z = a\}$	$\boxed{\qquad\qquad}$
5. $\{x = a \wedge y = b\}$ begin $z := x$; $x := y$; $y := z$ end $\{x = b \wedge y = a\}$	$\boxed{\qquad\qquad}$

i)　$x = a \wedge y = b \rightarrow y = b \wedge x = a$

１－２　$\{x = 0 \wedge y = b\}$ while $y \neq 0$ do begin $x:=x+2$; $y:=y-1$ end od $\{x = 2b \wedge y = 0\}$

証明：　注意：停止性は保証されない、部分正当性のみ成立つ。

1. $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$	Aas
2. $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$	Aas
3. $\{(x+2) + 2(y - 1) = 2b\}$ begin $x:=x+2$; $y:=y-1$ end $\{x + 2y = 2b\}$	Rcp 1 2
4. $\boxed{\qquad\qquad}$ begin $x:=x+2$; $y:=y-1$ end $\{x + 2y = 2b\}$	Rcs 3 i)

i) $\boxed{\qquad\qquad}$ $\rightarrow (x+2) + 2(y - 1) = 2b$

5. $\{x + 2y = 2b\}$ while $y \neq 0$ do begin $x:= x+2$; $y:=y-1$ end od $\{x + 2y = 2b \wedge y = 0\}$	$\boxed{\qquad\qquad}$
6. $\{x = 0 \wedge y = b\}$ while $y \neq 0$ do begin $x:= x+2$; $y:=y-1$ end od $\{x = 2b \wedge y = 0\}$	$\boxed{\qquad\qquad}$

ii)　$x = 0 \wedge y = b \rightarrow x + 2y = 2b$　iii)　$x + 2y = 2b \wedge y = 0 \rightarrow x = 2b \wedge y = 0$

練習２　次のことを証明せよ。

２－１　{x = a ∧ y = b } if x >= y then x := x – y else x := y – x { x = | a – b | }

ヒント１：結論から前にさかのぼって考える。

ヒント２：x = a∧y = b∧x >= y から x – y = | a – b | は帰結できる。

２－２　{x = a ∧ y = b } while x >= y do x:=x – y od { x = a mod b }　(a mod b は a÷b の余り)

ヒント１：while ループの不変条件を見つける。

II）表示的意味論について次の問いに答えよ。（例は講義のプリントを参照すること。）

練習３　環境 $\sigma = \{x \mapsto a,\ y \mapsto 0\}$ とプログラム Γ_1, Γ_2 について $\mathcal{C}[\![\Gamma_1]\!](\sigma)$, $\mathcal{C}[\![\Gamma_2]\!](\sigma)$ を計算せよ。

３－１　Γ_1＝begin y:=x; x:=0 end

３－２　Γ_2＝for x times do for x times do y:=succ y od od

III）不動点意味論について答えよ。

練習４　自然数の集合Nに対し、未定義要素を含んだ領域 N^+、$(N\times N)^+$ を考える。

N^+ あるいは $(N\times N)^+$ について次の式の内、正しいものに○あやまりに×を付けよ。

① $1 \sqsubseteq 5$　② $\omega_N \sqsubseteq 5$　③ $3 \sqsubseteq 3$　④ $3 \sqsubseteq \omega_N$　⑤ $(\omega_N, \omega_N) \sqsubseteq (\omega_N, \omega_N)$

⑥ $(\omega_N, 5) \sqsubseteq (5, \omega_N)$　⑦ $(\omega_N, 2) \sqsubseteq (\omega_N, 3)$　⑧ $(\omega_N, 2) \sqsubseteq (4, 2)$

練習５　Bool＝{T, F}を定義域、値域とする計算できる関数は $Bool^+ = \{T, F, \omega_{Bool}\}$ 上の関数と見なすべきである。このような関数、つまり、$(Bool\rightarrow Bool)^+$ に含まれる関数には９つがある。

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
T	ω_B	F	T	ω_B	F	T	ω_B	F	T	F	T
F	ω_B	ω_B	ω_B	F	F	F	T	T	T	F	T
ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	F	T

５－１　ここには計算される関数として不都合なものは含めていない。このようなよい性質を何と言うか。また、この性質を式で表せ。

５－２　$(Bool\rightarrow Bool)^+$ の最小要素を述べよ。

５－３　次の関数列がそれぞれ鎖かどうか答えよ。鎖の場合、その一意な極限（上限）を述べよ。

① f_1, f_2, f_3, f_6　② $f_1, f_1, f_4, f_6, f_6, f_6$　③ $f_1, f_1, f_2, f_2, f_2, f_2,$

練習６　次の再帰的関数定義について考える。

$$f(x) \;=\; (\text{ if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ else } f(x-1)+x)$$

この再帰的関数定義を汎関数Γで表すと次のようになる：

$$\Gamma = \lambda \varphi x.\ \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \varphi(x-1)+x$$

$(\mathrm{N}\to\mathrm{N})^{+}$ の最小要素である関数「$f_\omega = \lambda x.\ \omega_{\mathrm{N}}$」に、Γを繰り返し適用することを考える。

$$\begin{aligned}
\Gamma(f_\omega)(n) &= (\lambda \varphi x.\ \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \varphi(x-1)+x)(f_\omega)(n)\\
&= (\lambda x.\ \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ else } f_\omega(x-1)+x)(n)\\
&= \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \omega_{\mathrm{N}} + n\\
&= \begin{cases} 0 & (\text{n=0 のとき})\\ \omega_{\mathrm{N}} & (\text{それ以外}) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2(f_\omega)(n) &= (\lambda \varphi x.\ \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \varphi(x-1)+x)(\Gamma(f_\omega))(n)\\
&= \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \Gamma(f_\omega)(n-1)+n\\
&= \begin{cases} 0 & (\text{n = 0 のとき})\\ 0+\text{n} & (\text{n –1 = 0 のとき})\\ \omega_{\mathrm{N}} & (\text{それ以外}) \end{cases}
\quad = \begin{cases} 0 & (\text{n = 0 のとき})\\ 1 & (\text{n = 1 のとき})\\ \omega_{\mathrm{N}} & (\text{それ以外}) \end{cases}
\end{aligned}$$

６－１　$\Gamma^3(f_\omega)(n)$、$\Gamma^4(f_\omega)(n)$ を求めよ。

６－２　一般に $\Gamma^{\mathrm{k}}(f_\omega)(n)$ を求めよ。

６－３　関数列 f_ω, $\Gamma^1(f_\omega)$, $\Gamma^2(f_\omega)$, … , $\Gamma^{\mathrm{k}}(f_\omega)$ が鎖となることを確認し、この鎖の一意な極限を求めよ。

６－４　$\lim_{i\to\infty}\Gamma^{i}(f_\omega)$（つまり、無限の関数列 f_ω, $\Gamma^1(f_\omega)$, $\Gamma^2(f_\omega)$, … , $\Gamma^{\mathrm{k}}(f_\omega)$, … の一意な極限）をもとめよ。これが最小不動点、即ち元の再帰的定義の表示的意味である。

練習７　次の再帰的定義について、上と同様の手順で表示的意味を与えよ。

$$g(x) \;=\; (\text{ if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } g(x-2))$$

ヒント：まず、この関数（プログラム）がどんな振舞いをするのか、直感的に抑えてから考える。