プログラミング言語論　演習問題（解答例）（プログラミング言語の意味論）

平成１９年７月１９日 担当：犬塚

I）ホーア論理を使ったプログラムの証明について考える。

例題：$\{x = a\}$ if $a >= 0$ then skip else $x := -x$ $\{ x = |a| \}$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Ask}}{\{x = |a|\}\ \text{skip}\ \{x = |a|\}}}{\{x = a \land x >= 0\}\ \text{skip}\ \{x = |a|\}}\,\text{Rcs} \qquad \dfrac{\overset{\text{Aas}}{\{-x = |a|\}\ x := -x\ \{x = |a|\}}}{\{x = a \land x < 0\}\ x := -x\ \{x = |a|\}}\,\text{Rcs}}{\{x = a\}\ \text{if } x >= 0 \text{ then skip else } x := -x\ \{x = |a|\}}\,\text{Rif}$$

次のように書いてもよい：

1. $\{x = \lvert a \rvert\}$ skip $\{x = \lvert a \rvert\}$	Ask
2. $\{x = a \land x >= 0\}$ skip $\{x = \lvert a \rvert\}$	Rcs 1 i) $x = a \land x >= 0 \rightarrow x = \lvert a \rvert$
3. $\{-x = \lvert a \rvert\}$ $x := -x$ $\{x = \lvert a \rvert\}$	Aas
4. $\{x = a \land x < 0\}$ $x := -x$ $\{x = \lvert a \rvert\}$	Rcs 3 ii) $x = a \land x < 0 \rightarrow -x = \lvert a \rvert$
5. $\{x = a\}$ if $x >= 0$ then skip else $x := -x$ $\{x = \lvert a \rvert\}$	Rif 2 4

練習１　次の証明の空欄を埋めよ。

１－１　$\{x = a \land y = b\}$ begin $z := x$; $x := y$; $y := z$ end $\{x = b \land y = a\}$

(答)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Aas}}{\{y=b\land x=a\}\ z := x\ \{y=b\land z=a\}} \quad \overset{\text{Aas}}{\{y=b\land z=a\}x:=y\{x=b\land z=a\}} \quad \overset{\text{Aas}}{\{x=b\land z=a\}y:=z\{x=b\land y=a\}}}{\{y = b \land x = a\}\ \text{begin } z := x;\ x := y;\ y := z \text{ end}\ \{x = b \land y = a\}}\,\text{Rcp}}{\{x = a \land y = b\}\ \text{begin } z := x;\ x := y;\ y := z \text{ end}\ \{x = b \land y = a\}}\,\text{Rcs}$$

1. $\{x = b \land z = a\}$ $y := z$ $\{x = b \land y = a\}$	Aas
2. $\{y = b \land z = a\}$ $x := y$ $\{x = b \land z = a\}$	Aas
3. $\{y = b \land x = a\}$ $z := x$ $\{y = b \land z = a\}$	Aas
4. $\{y = b \land x = a\}$ begin $z := x$; $x := y$; $y := z$ end $\{x = b \land y = a\}$	Rcp, 1,2,3
5. $\{x = a \land y = b\}$ begin $z := x$; $x := y$; $y := z$ end $\{x = b \land y = a\}$	Rcs, 4 i)

i) $x = a \land y = b \rightarrow y = b \land x = a$

１－２　$\{x = 0 \land y = b\}$ while $y \neq 0$ do begin $x:=x+2$; $y:=y-1$ end od$\{x = 2b \land y = 0\}$

(答)　注意：停止性は保証されない、部分正当性のみ成立つ。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Aas}}{\{(x+2)+2(y-1)= 2b\}\ x:=x+2\ \{x+2(y-1)=2b\}} \quad \overset{\text{Aas}}{\{x+2(y-1)=2b\}\ y:=y-1\ \{x+2y=2b\}}}{\{(x+2)+2(y-1)= 2b\}\ \text{begin } x:=x+2;\ y:=y-1 \text{ end}\ \{x+2y=2b\}}\,\text{Rcp}}{\{y\neq 0 \land x+2y=2b\}\ \text{begin } x:=x+2;\ y:=y-1 \text{ end}\ \{x+2y=2b\}}\,\text{Rcs}}{\{x+2y=2b\}\text{while } y\neq 0 \text{ do begin } x:= x+2;y:=y-1 \text{ end od}\{x+2y=2b\land y = 0\}}\,\text{Rwh}}{\{x= 0\land y=b\}\text{while } y\neq 0 \text{ do begin } x:= x+2;\ y:=y-1 \text{ end od}\{x = 2b\land y = 0\}}\,\text{Rcs}$$

1. $\{(x+2) +2(y-1)= 2b\}$ $x := x + 2$ $\{x +2(y-1)= 2b\}$	Aas
2. $\{x +2(y-1)= 2b\}$ $y := y - 1$ $\{x +2y=2b\}$	Aas
3. $\{(x+2) +2(y-1)= 2b\}$ begin $x:=x+2$; $y:=y-1$ end $\{x +2y=2b\}$	Rcp 1 2
4. $\{y\neq 0 \land x +2y=2b\}$ begin $x:=x+2$; $y:=y-1$ end $\{x +2y=2b\}$	Rcs 3 i)

i) $y\neq 0 \land x +2y=2b \rightarrow (x+2) +2(y-1)= 2b$

5. $\{x+2y=2b\}$ while $y\neq 0$ do begin $x:=x+2; y:=y-1$ end od $\{x+2y=2b\wedge y=0\}$ Rwh 4

6. $\{x=0\wedge y=b\}$ while $y\neq 0$ do begin $x:=x+2;\ y:=y-1$ end od $\{x=2b\wedge y=0\}$ Rcs, 5

ii) $x=0\wedge y=b \rightarrow x+2y=2b$

iii) $x+2y=2b \wedge y=0 \rightarrow x=2b \wedge y=0$

練習２　次のことを証明せよ。

２－１　$\{x=a \wedge y=b\}$ if $x>=y$ then $x:=x-y$ else $x:=y-x$ $\{x=|a-b|\}$

(答)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{l}\text{Aas}\\ \{x-y=|a-b|\}\ x:=x-y\ \{x=|a-b|\}\end{array}}{\{x=a\wedge y=b\wedge x>=y\}\ x:=x-y\ \{x=|a-b|\}}\,\text{Rcs}\qquad \dfrac{\begin{array}{l}\text{Aas}\\ \{y-x=|a-b|\}\ x:=y-x\ \{x=|a-b|\}\end{array}}{\{x=a\wedge y=b\wedge x<y\}\ x:=y-x\ \{x=|a-b|\}}\,\text{Rcs}}{\{x=a\wedge y=b\}\ \text{if } x>=y \text{ then } x:=x-y \text{ else } x:=y-x\ \{x=|a-b|\}}\,\text{Rif}$$

1. $\{x-y=|a-b|\}\ x:=x-y\ \{x=|a-b|\}$ Aas
2. $\{x=a \wedge y=b \wedge x>=y\}\ x:=x-y\ \{x=|a-b|\}$ Rcs 1
3. $\{y-x=|a-b|\}\ x:=y-x\ \{x=|a-b|\}$ Aas
4. $\{x=a \wedge y=b \wedge y>x\}\ x:=y-x\ \{x=|a-b|\}$ Rcs 3
5. $\{x=a \wedge y=b\}$ if $x>=y$ then $x:=x-y$ else $x:=y-x$ $\{x=|a-b|\}$ Rif 4

２－２　$\{x=a \wedge y=b\}$ while $x>=y$ do $x:=x-y$ od $\{x=a \bmod b\}$　($a \bmod b$ は $a\div b$ の余り)

(答)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{l}\text{Aas}\\ \{(x-y) \bmod y = a \bmod b\}\ x:=x-y\ \{x \bmod y = a \bmod b\}\end{array}}{\{x>=y \wedge x \bmod y = a \bmod b\}\ x:=x-y\ \{x \bmod y = a \bmod b\}}\,\text{Rcs}}{\{x \bmod y = a \bmod b\}\ \text{while } x>=y \text{ do } x:=x-y \text{ od}\ \{x<y \wedge x \bmod y = a \bmod b\}}\,\text{Rwh}}{\{x=a \wedge y=b\}\ \text{while } x>=y \text{ do } x:=x-y \text{ od}\ \{x=a \bmod b\}}\,\text{Rcs}$$

1. $\{(x-y) \bmod y = a \bmod b\}\ x:=x-y\ \{x \bmod y = a \bmod b\}$ Aas
2. $\{x>=y \wedge x \bmod y = a \bmod b\}\ x:=x-y\ \{x \bmod y = a \bmod b\}$ Rcs1 i)

   i) $x>=y \wedge x \bmod y = a \bmod b \rightarrow (x-y) \bmod y = a \bmod b$
3. $\{x \bmod y = a \bmod b\}$ while $x>=y$ do $x:=x-y$ od $\{x<y \wedge x \bmod y = a \bmod b\}$

   Rwh 2
4. $\{x=a \wedge y=b\}$ while $x>=y$ do $x:=x-y$ od $\{x=a \bmod b\}$ Rcs3 ii) iii)

   ii) $x=a \wedge y=b \rightarrow x \bmod y = a \bmod b$

   iii) $x<y \wedge x \bmod y = a \bmod b \rightarrow x = a \bmod b$

II）表示的意味論について次の問いに答えよ。（例は講義のプリントを参照すること。）

練習３　環境 $\sigma=\{x \mapsto a,\ y \mapsto 0\}$ とプログラム Γ_1, Γ_2 について $\mathcal{C}[\![\ \Gamma_1\ ]\!](\sigma)$, $\mathcal{C}[\![\Gamma_2\ ]\!](\sigma)$ を計算せよ。

３－１　Γ_1 = begin y:=x; x:=0 end

(答)

$\mathcal{C}[\![\ y{:=}x\ ]\!] = \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \mathcal{E}[\![\ x\ ]\!](\rho)) = \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(x))$

$\mathcal{C}[\![\ x{:=}0\ ]\!] = \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, x \mapsto \mathcal{E}[\![\ 0\ ]\!](\rho)) = \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, x \mapsto 0)$

よって、

$\mathcal{C}[\![\Gamma_1]\!](\sigma) = \mathcal{C}[\![$ begin y:=x; x:=0 end $]\!](\sigma)$

$= (\lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, x \mapsto 0))((\lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(x)))\ (\sigma))$

$= (\lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, x \mapsto 0))((\lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(x)))\ (\{x \mapsto a, y \mapsto 0\}))$

$= (\lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, x \mapsto 0))(\mathrm{update}(\{x \mapsto a, y \mapsto 0\}, y, \mapsto a))$

$= (\lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, x \mapsto 0))(\{x \mapsto a, y \mapsto a\})$

$= \mathrm{update}(\{x \mapsto a, y \mapsto a\}, x \mapsto 0)$

$= \{x \mapsto 0, y \mapsto a\}$

３－２　Γ_2 = for x times do for x times do y:=succ y od od

(答)

$\mathcal{C}[\![\ y{:=}\mathrm{succ}\ y\ ]\!] = \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(y)+1)$

$\mathcal{C}[\![$ for x times do y:=succ y od $]\!](\rho)$

$= \mathrm{iterate}(\mathcal{E}[\![\ x\ ]\!](\rho), \mathcal{C}[\![\ y{:=}\mathrm{succ}\ y\ ]\!],\ \rho)$

$= \mathrm{iterate}(\rho(x),\ \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(y)+1),\ \rho)$

$= \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(y) + \rho(x))$

したがって、$\mathcal{C}[\![$ for x times do y:=succ y od $]\!](\rho) = \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(y) + \rho(x))$

よって、

$\mathcal{C}[\![\ \Gamma_2\ ]\!](\sigma) = \mathcal{C}[\![$ for x times do for x times do y:=succ y od od $]\!](\sigma)$

$= \mathrm{iterate}(\mathcal{E}[\![\ x\ ]\!](\sigma), \mathcal{C}[\![$ for x times do y:=succ y od $]\!],\ \sigma)$

$= \mathrm{iterate}(\sigma(x), \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(y) + \rho(x)),\ \sigma)$

$= \mathrm{iterate}(a,\ \lambda\ \rho\,.\ \mathrm{update}(\rho, y \mapsto \rho(y)+a), \{x \mapsto a, y \mapsto 0\})$

$= \{x \mapsto a, y \mapsto a^2\}$

III）不動点意味論について答えよ。

練習４　自然数の集合Ｎに対し、未定義要素を含んだ領域N^+、$(N\times N)^+$を考える。

N^+あるいは $(N\times N)^+$について次の式の内、正しいものに○あやまりに×を付けよ。

① $1 \sqsubseteq 5$　② $\omega_N \sqsubseteq 5$　③ $3 \sqsubseteq 3$　④ $3 \sqsubseteq \omega_N$　⑤ $(\omega_N, \omega_N) \sqsubseteq (\omega_N, \omega_N)$

⑥ $(\omega_N, 5) \sqsubseteq (5, \omega_N)$　⑦ $(\omega_N, 2) \sqsubseteq (\omega_N, 3)$　⑧ $(\omega_N, 2) \sqsubseteq (4, 2)$

(答)　① ×　② ○　③ ○　④ ×　⑤ ○　⑥ ×　⑦ ×　⑧ ○

練習５　Bool＝{T, F}を定義域、値域とする計算できる関数は $Bool^+$＝{T,F, ω_{Bool}}上の関数と見なすべきである。このような関数、つまり、$(Bool\to Bool)^+$ に含まれる関数には９つがある。

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
T	ω_B	F	T	ω_B	F	T	ω_B	F	T	F	T
F	ω_B	ω_B	ω_B	F	F	F	T	T	T	F	T
ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	ω_B	F	T

５－１　ここには計算される関数として不都合なものは含めていない。このようなよい性質を何と言うか。また、この性質を式で表せ。

（答）単調性、　関数 f が単調であるとは、$x \sqsubseteq y \to f(x) \sqsubseteq f(y)$

５－２　$(Bool\to Bool)^+$ の最小要素を述べよ。　（答）f_1

５－３　次の関数列がそれぞれ鎖かどうか答えよ。鎖の場合、その一意な極限（上限）を述べよ。

① f_1, f_2, f_3, f_6　② $f_1, f_1, f_4, f_6, f_6, f_6$　③ $f_1, f_1, f_2, f_2, f_2, f_2,$

（答）①鎖でない。なぜなら $f_2 \not\sqsubseteq f_3$　②鎖である　極限は f_6　③鎖である　極限は f_2

練習６　次の再帰的関数定義について考える。

$f(x)$ = (if x =0 then 0 else $f(x-1)+x$)

この再帰的関数定義を汎関数Γで表すと次のようになる：$\Gamma=\lambda\varphi x.$ if x =0 then 0 else $\varphi(x-1)+x$

つぎに関数「$f_\omega = \lambda x.\ \omega_N$」を考える（この関数 f_ω は$(N\to N)^+$ の最小要素）と、

$\Gamma(f_\omega)(n)$= ($\lambda\varphi x.$ if x =0 then 0 else $\varphi(x-1)+x$) $(f_\omega)(n)$

= ($\lambda x.$ if x =0 then 0 else $f_\omega(x-1)+x)(n)$

= if n =0 then 0 else $\omega_N + n$

$$= \begin{cases} 0 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$\Gamma^2(f_\omega)(n)$ = ($\lambda\varphi x.$ if x =0 then 0 else $\varphi(x-1)+x$) $(\Gamma(f_\omega))(n)$

= if n =0 then 0 else $\Gamma(f_\omega)(n-1)+n$

$$= \begin{cases} 0 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 0+n & (n-1=0 \text{ のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad = \begin{cases} 0 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

６－１　$\Gamma^3(f_\omega)(n)$、$\Gamma^4(f_\omega)(n)$を求めよ。

（答）$\Gamma^3(f_\omega)(n)$ = ($\lambda\varphi x.$ if x =0 then 0 else $\varphi(x-1)+x$) $(\Gamma^2(f_\omega))(n)$

= if n =0 then 0 else $\Gamma^2(f_\omega)(n-1)+n$

$$= \begin{cases} 0 & (\text{n} = 0\text{ のとき}) \\ 0+\text{n} & (\text{n}-1=0\text{ のとき}) \\ 1+\text{n} & (\text{n}-1=1\text{ のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad = \begin{cases} 0 & (\text{n} = 0\text{ のとき}) \\ 1 & (\text{n} = 1\text{ のとき}) \\ 1+2 & (\text{n} = 2\text{ のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$\Gamma^4(f_\omega)(n) = (\lambda\varphi x.\ \text{if } x=0 \text{ then } 0 \text{ else } \varphi(x-1)+x)\ (\Gamma^3(f_\omega))(n)$

$= \text{if } n=0 \text{ then } 0 \text{ else } \Gamma^3(f_\omega)(n-1)+n$

$$= \begin{cases} 0 & (\text{n} = 0\text{ のとき}) \\ 0+\text{n} & (\text{n}-1=0\text{ のとき}) \\ 1+\text{n} & (\text{n}-1=1\text{ のとき}) \\ 1+2+\text{n} & (\text{n}-1=2\text{ のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad = \begin{cases} 0 & (\text{n} = 0\text{ のとき}) \\ 1 & (\text{n} = 1\text{ のとき}) \\ 1+2 & (\text{n} = 2\text{ のとき}) \\ 1+2+3 & (\text{n} = 3\text{ のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

６－２　一般に$\Gamma^k(f_\omega)(n)$を求めよ。

（答）次のことは数学的帰納法で示される。

$$\Gamma^k(f_\omega)(n) = \begin{cases} 0+1+...+\text{k} & (\text{n} \leqq \text{k}\text{ のとき}) \\ \omega_N & (\text{n} > \text{k}\text{ のとき}) \end{cases}$$

６－３　関数列f_ω, $\Gamma^1(f_\omega)$, $\Gamma^2(f_\omega)$, … , $\Gamma^k(f_\omega)$が鎖となることを確認し、この鎖の一意な極限を求めよ。

（答）　n≦k－１のとき、$\Gamma^{k\text{-}1}(f_\omega)(\text{n}) = \Gamma^k(f_\omega)(\text{n})$

n＞k　　のとき、$\Gamma^{k\text{-}1}(f_\omega)(\text{n}) = \omega_N$

よって$\Gamma^{k\text{-}1}(f_\omega) \sqsubseteq \Gamma^k(f_\omega)$であり、鎖である。この鎖の一意な極限（上限）は$\Gamma^k(f_\omega)$。

６－４　$\lim_{i\to\infty}\Gamma^i(f_\omega)$（つまり、無限の関数列 f_ω, $\Gamma^1(f_\omega)$, $\Gamma^2(f_\omega)$, … , $\Gamma^k(f_\omega)$, … の一意な極限）をもとめよ。これが最小不動点、即ち元の再帰的定義の表示的意味である。

（答）どんな n に対しても k≧n において、$\Gamma^k(f_\omega)(\text{n})$＝１＋２＋・・・＋n であるため、

$\lim_{i\to\infty}\Gamma^i(f_\omega) = \lambda\text{n}.\ 1+2+\cdots+\text{n}$

練習７　次の再帰的定義について、上と同様の手順で表示的意味を与えよ。

$g(x) = (\text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } g(x-2))$

（答）g は次の汎関数の最小不動点として与えられる：　$\Gamma = \lambda\varphi x.\ \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } \varphi(x-2)$

$f_\omega = \lambda\text{x}.\ \omega_N$ 対して、$\Gamma(f_\omega)$, $\Gamma^2(f_\omega)$,…を調べる。

$\Gamma(f_\omega)(n) = (\lambda\varphi x.\ \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } \varphi(x-2))\ (f_\omega)(n)$

$= (\lambda x.\ \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } f_\omega(x-2))(n) = \text{if } n=0 \text{ then } 0 \text{ else } \omega_N$

$$= \begin{cases} 1 & (\text{n=0 のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$\Gamma^2(f_\omega)(n) = (\lambda\varphi x.\ \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } \varphi(x-2))\ (\Gamma(f_\omega))(n)$

$= (\lambda x.\ \text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } \Gamma(f_\omega)(x-2))(n)$

$$= \begin{cases} 1 & (\text{n=0,2 のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$\Gamma^k(f_\omega)(n)$

$$= \begin{cases} 1 & (\text{n}=0,2,4,\cdots,2(\text{k}-1)\text{のとき}) \\ \omega_N & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

したがって

$$\lim_{i\to\infty}\Gamma^i(f_\omega) = \begin{cases} 1 & (\text{n が偶数のとき}) \\ \omega_N & (\text{n が奇数のとき}) \end{cases}$$