プログラミング言語論

第14回
プログラムの意味論と検証(3)
不動点意味論

担当:犬塚

今日の講義

- これまでに簡単なプログラミング言語について、表示的意味論を与えた。
- 本講義では、再帰呼び出しで定義される関数についての表示的意味を与える。
- この理論は不動点意味論と呼ばれる。
- この意味論のために導入する領域理論と合わせて、D.Scottが与えた。

再帰

- 再帰は、基本的な制御構造である。
- チューリング機械と同様によく用いられる計算の原理である、帰納的関数論(recursive function theory)では、再帰が基本的制御構造。
- 他のループも再帰に還元できる。
- 再帰は、内側の呼出しでサイズの小さなパラメータで呼び出すように書けば確実に停止するので、扱いの容易な制御構造である。

この講義で導入するアイデア

- 再帰定義を汎関数を用いて再定義する。
- 再帰的プログラムの意味を、汎関数の不動点として捉える。
- 再帰的関数の表示的意味としてふさわしい、関数の領域を用意する。
  - 連続関数
- 領域の上で、汎関数の不動点が存在することを示す＝不動点定理

再帰

- $f(x, y)$ ＝ (if x=0 then y
  else $f(x\text{-}1, 2*y)$)

$f(3,3)=f(2,6)=f(1,12)=f(0,24)=24$

- $g(x,y)$ ＝ (if $x=y$ then $y+1$
  else $g(x, g(x\text{-}1, y+1))$)

$g(4,2)=g(4,g(3,3))=g(4,4)=5$

$g(5,1)=g(5,g(4,2))=g(5,g(4,g(3,3)))=g(5,g(4,4))=g(5,5)=6$

$g(2,3)=g(2,g(1,4))=g(2,g(1,g(0,5)))=g(2,g(1,g(0,g(-1,6))))=\ldots$

再帰と汎関数

再帰的関数定義

$f(x,y)$ ＝ (if x=0 then y
else $f(x - 1, 2 * y)$)

この再帰的な関数定義は、汎関数

$\Gamma = \lambda\varphi\, x\, y.$ (if x=0 then y else $\varphi(x - 1, 2 * y)$)

を用いると、次の方程式として書くことができる。

$$f = \Gamma(f)$$

練習

次の再帰的関数定義を、汎関数を用いて書き直せ。

$g(x,y)$ ＝ (if $x=y$ then $y+1$ else $g(x\text{-}1, y+1)$)

$\Gamma = \lambda\, \psi\, xy.$ (if $x=y$ then $y+1$ else $\psi(x\text{-}1, y+1)$)

としたとき、

$g = \Gamma(g)$

Γの不動点

$\Gamma_1 = \lambda\varphi\, xy.$(if x=0 then y else $\varphi(x\text{-}1, 2*y)$)

は次の関数を不動点として持つ。

$f = \lambda xy.\ 2^x y$

$$\begin{aligned}\Gamma_1(f) &= \lambda xy.(\text{if } x=0 \text{ then } y \text{ else } f(x\text{-}1, 2*y))\\ &= \lambda xy.(\text{if } x=0 \text{ then } y \text{ else } 2^{x-1}2*y)\\ &= \lambda xy.(\text{if } x=0 \text{ then } 2^x y \text{ else } 2^x y)\\ &= \lambda xy.\ 2^x y = f\end{aligned}$$

2つの不動点

次の汎関数は少なくとも2つの不動点をもつ。

$\Gamma_2 = \lambda\varphi xy.\ (\text{if } x=y \text{ then } y+1 \text{ else } \varphi(x, \varphi(x-1, y+1)))$

- $f_1 = \lambda xy.\ x+1$

$\Gamma_2(f_1) = \lambda xy.(\text{if } x=y \text{ then } y+1 \text{ else } f_1(x, f_1(x-1, y+1)))$

$= \lambda xy.(\text{if } x=y \text{ then } x+1 \text{ else } x+1) = f_1$

- $f_2 = \lambda xy.(\text{if } x \geqq y \text{ then } x+1 \text{ else } y-1)$

$\Gamma_2(f_2) = \lambda xy.(\text{if } x=y \text{ then } y+1 \text{ else } f_2(x, f_2(x-1, y+1)))$

$= \lambda xy.(\text{if } x=y \text{ then } y+1 \text{ else } f_2(x, \{\text{if } x-1 \geqq y+1 \text{ then } x \text{ else } y\}))$

$= \lambda xy.(\text{if } x=y \text{ then } y+1 \text{ else } f_2(x, \{\text{if } x \geqq y+2 \text{ then } x \text{ else } y\}))$

$= \lambda xy.(\text{if } x=y \text{ then } y+1 \text{ else}$

$\{\text{if } x \geqq y+2 \text{ then } x+1 \text{ else if } x \geqq y \text{ then } x+1 \text{ else } y-1\}))$

$= \lambda xy.(\text{if } x \geqq y \text{ then } x+1 \text{ else } y-1) = f_2$

汎関数によって定義される関数

- 関数hについて $x = h(x)$の解 を、不動点(fixed point)という。
- xが関数 h の不動点であるとは、このxにこの関数を施しても値が変わらないということ。

- 再帰的に定義される関数は、汎関数Γの方程式 $f = \Gamma(f)$ の解と考えられる。つまり、Γの不動点である。

疑問点：

- どんなΓは不動点をもつことが保証できるのか？
- 2つ以上の不動点を持つことはないのか？2つ以上不動点をもつ場合、どれが定義される関数なのか？

無限個の不動点をもつ汎関数の例

$\Gamma_3 = \lambda\varphi x.\ (\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } \varphi(x+1))$

- この汎関数は、以下のものすべてを不動点として持つ。
  - $f_0 = \lambda x.(\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } 0)$
  - $f_1 = \lambda x.(\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } 1)$
  - $f_2 = \lambda x.(\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } 2)$
  - $f_3 = \lambda x.(\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } 3)$

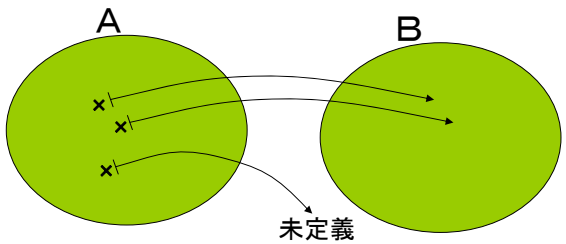
  …
- さらに、次の部分関数も不動点と見なせる。
  - $f_u = \lambda x.(\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else 未定義})$

実際には、上のΓ_3 に対応する次のプログラムではf_uがまさに、このプログラムの意味にふさわしい。

$f(x) = (\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x+1))$

部分関数

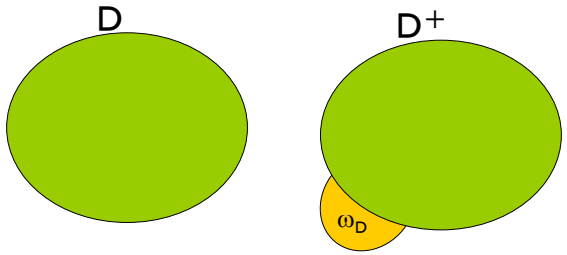
- プログラムとしての関数は、その計算が停止しない場合、未定義(undefined)であると考えられる。
- 即ち、プログラムの意味は、未定義の部分を含んだ関数＝部分関数(partial function)として与えなければならない。
- 未定義の箇所のない関数は全域関数(total function)。



定義域、値域の拡張

- 関数の定義域、値域には未定義要素も含めて考えるのが便利である。
- そこで、集合Dに対して次の集合を定義することにする。

  $D^+ = D \cup \{\omega_D\}$
- こうした集合を領域(domain)という。

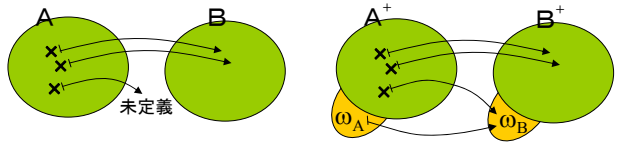


自然な拡張

未定義を明示的に扱うため、部分関数の扱いを再構成する。

- 定義域A、値域Bの部分関数 f : A→B
  に対して次のとおり、全域関数 f^+: $A^+ \to B^+$を与える。

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) \ ; f(x) \text{ が定義されているとき} \\ \omega_B \ ; x = \omega_A \text{ か、または } f(x) \text{が未定義のとき} \end{cases}$$

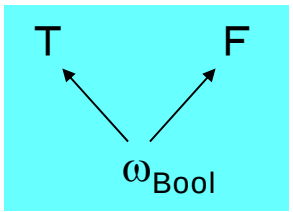


- f^+ は f の自然な拡大(natural extension)という。

領域の上の半順序関係

- 領域D^+上で、未定義の値から定義の値への順序 $\sqsubseteq$を考える。
  すなわち、x, y $\in D^+$について、
  $x = \omega_D$,またはx=y のときそのときに限り$x \sqsubseteq y$

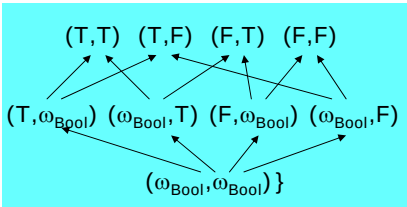
例　Bool={T, F}としたとき、$Bool^+$={T, F, ω_{Bool}}で、次のハッセ図で表される順序をもつ。



2引数の関数

- f(x,y)=x+yのような2引数関数の定義域に対する領域を与える。
- $D_1 \times D_2$に対応する領域は次のとおり。
  $(D_1 \times D_2)^+ = D_1^+ \times D_2^+$
- $(A \times B)^+$上の半順序を次のとおり定義する。
  $(x, y), (x', y') \in (D_1 \times D_2)^+$について、
  $x \sqsubseteq x'$ かつ $y \sqsubseteq y'$ のとき、そのときに限り$(x, y) \sqsubseteq (x', y')$

例　Bool={T, F}のとき、
$(Bool \times Bool)^+$
$= \{(T,T), (T,F), (T,\omega_{Bool}), (F,T), (F,F), (F,\omega_{Bool}), (\omega_{Bool},T), (\omega_{Bool},F), (\omega_{Bool},\omega_{Bool})\}$
これは右のハッセ図で表される順序をもつ。



関数の単調性

- 通常通り定義された関数は領域上の順序に関して単調性をもつ。

単調性(monotonic): x $\sqsubseteq$ yのとき、f(x) $\sqsubseteq$ f(y)

例　通常、関数の引数が未定義なら関数の返り値は未定義。

f : N×N → N,　　$f(x, y) = x+y$

$f^+ : (N \times N)^+ \to N^+$, $f^+(x, y) = x+y$

f^+は $\sqsubseteq$ について単調である。

(∵) $(x, y) \sqsubseteq (x', y')$とする。

x, yがどちらもω_Nでなければ$(x, y) = (x', y')$。よって$f^+(x, y) \sqsubseteq f^+(x', y')$

x, yのどちらかがω_Nなら $f^+(x, y) = \omega_N$なのでやはり$f^+(x, y) \sqsubseteq f^+(x', y')$

練習

g : N×N → N,　　$g(x, y) =$ if $x=0$ then x else $x+y$

も単調性を持つことを確認せよ。

この場合は、もう少し場合わけが必要。

$(x, y) \sqsubseteq (x', y')$とする。

1) $x = \omega_N$のとき

2) $x = 0$ のとき

3) xが0, ω_Nのどちらでもなく、$y = \omega_N$ のとき

4) xが0, ω_Nのどちらでもなく、y もω_N 以外の値のとき

計算される関数の候補

- 我々の表示的意味論として考えるべき関数は、単調な関数だけでよい。
  - 単調でない関数は不自然である: ある引数が未定義であるかどうかで、答えが変わるのはおかしい。

そこで、

$(D_1 \to D_2)^+ = \{ f^+ \mid f^+ : D_1{}^+ \to D_2{}^+$ は単調$\}$

関数の間の順序

- 汎関数も同様の議論で扱うには、汎関数の定義域＝関数の集合にも順序を導入する必要がある。

- $f_1, f_2 \in (D_1 \to D_2)^+$について、
  任意の $x \in D_1{}^+$で $f_1(x) \sqsubseteq f_2(x)$であるときそのときに限り、

  $f_1 \sqsubseteq f_2$

- つまり、$f_1 \sqsubseteq f_2$ であるとは、
  f_1が未定義でない限り $f_1(x) = f_2(x)$であるということ。
  （$f_1(x)$が未定義の場合は、$f_2(x)$はどんな値を持ってもよい）

鎖、一意な極限

- D^+の要素の(無限)列 $x_0, x_1, x_2, \ldots$が $x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \ldots$ となるとき、この列をD^+の鎖 (chain) という。
- D^+の鎖 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ に対し、つぎの x をこの鎖の一意な極限(unique limit)という。
  - $x_i \sqsubseteq x$, $i=0, 1, \ldots$
  - y が $x_i \sqsubseteq y$, $i = 0, 1, \ldots$ をみたすなら $x \sqsubseteq y$

  (xは鎖のどの要素より大きく、そういうものの中で一番小さい)
- 鎖 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ の一意な極限を $\lim_{i\to\infty} x_i$ と書く。

領域の性質

- これまで検討してきた関数の領域は次の性質D^+を持つ。
  - D^+は $\sqsubseteq$ に関して半順序集合である。
  - D^+は最小の要素を持つ。
  - D^+のすべての鎖が、一意な極限をもつ。

  こうしたことは、$(D_1 \times D_2)^+$、$(D_1 \to D_2)^+$にも言える。
- ここで改めて、上の性質を持つとき領域ということにする。

連続

- D_1^+、D_2^+を領域、$f : D_1^+ \to D_2^+$を単調な関数とする。
- このとき、D_1^+の任意の鎖、$x_0, x_1, x_2, \ldots$を考えると、fは単調であるので、$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$も鎖である。
- D_2^+は領域なので、任意の鎖は一意な極限をもつ。

このとき次が成立つ場合、fは連続(continuous)であるという。

$$f(\lim_{i\to\infty} x_i) = \lim_{i\to\infty} f(x_i)$$

解析での連続と、ここでの連続

- ここで用いた連続の概念は、特別のものでない。
- 普通に用いる連続の概念は、実はここで述べた連続の特別なケース。

通常連続は次のように定義される。

- R(実数)の点列$a_0, a_1, a_2, \ldots$は次のとき極限aを持つ。

  任意の$\varepsilon > 0$に対して、あるNがあり、すべての $i > N$ で $|a - a_i| < \varepsilon$。
- 関数 f: R→Rが連続であるとは、極限をもつ任意のRの点列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$に対し、$f(\lim_{i\to\infty} a_i) = \lim_{i\to\infty} f(a_i)$。

不動点定理

- D^+を領域、f : $D^+ \to D^+$を連続関数とする。
- このとき f は、

$$x = \lim_{n \to \infty} f^n(\omega_D)$$

によって与えられる不動点 x を持つ。

- ただし、ω_DはD^+の最小要素。
- さらに、この x は最小の不動点である。

不動点定理の証明(1)

- まず $f^i(\omega_D) \sqsubseteq f^{i+1}(\omega_D)$を i に関する数学的帰納法で示す。

  $i=0$ の場合、ω_Dは最小要素なので $\omega_D \sqsubseteq f(\omega_D)$。

  $f^i(\omega_D) \sqsubseteq f^{i+1}(\omega_D)$ならば f の単調性から $f^{i+1}(\omega_D) \sqsubseteq f^{i+2}(\omega_D)$

  したがって、$\omega_D \sqsubseteq f(\omega_D) \sqsubseteq f^2(\omega_D) \sqsubseteq \cdots$ 示された。

- したがってこれらは鎖となり、一意な極限 $x = \lim_{i \to \infty} f^i(\omega_D)$がある。

  すると、f の連続性から、

$$f(\lim_{i \to \infty} f^i(\omega_D)) = \lim_{i \to \infty} f^{i+1}(\omega_D) = \lim_{i \to \infty} f^i(\omega_D)$$

- つまり、xは不動点である。

不動点定理の証明(2)

つぎに x が最小の不動点であることを示す。

- y を f のある不動点とする。
- するとω_Dは最小要素なので $\omega_D \sqsubseteq y$。
- f の単調性から $f(\omega_D) \sqsubseteq f(y) = y$
- 同様に任意の i について$f^i(\omega_D) \sqsubseteq y$である。
- したがって、極限の性質より

$$x = \lim_{i \to \infty} f^i(\omega_D) \sqsubseteq y$$

(以上)

まとめ

- 再帰的プログラムの意味を与える不動点意味論を紹介した。
- 再帰的プログラムは汎関数の不動点として定義できる。
- 関数が不動点を持つための定理＝不動点定理を利用して、再帰定義が定義するものを明らかにすることができる。
- 不動点定理が述べる最小不動点は確かに、プログラムの動きと一致する。