プログラミング言語論

第13回

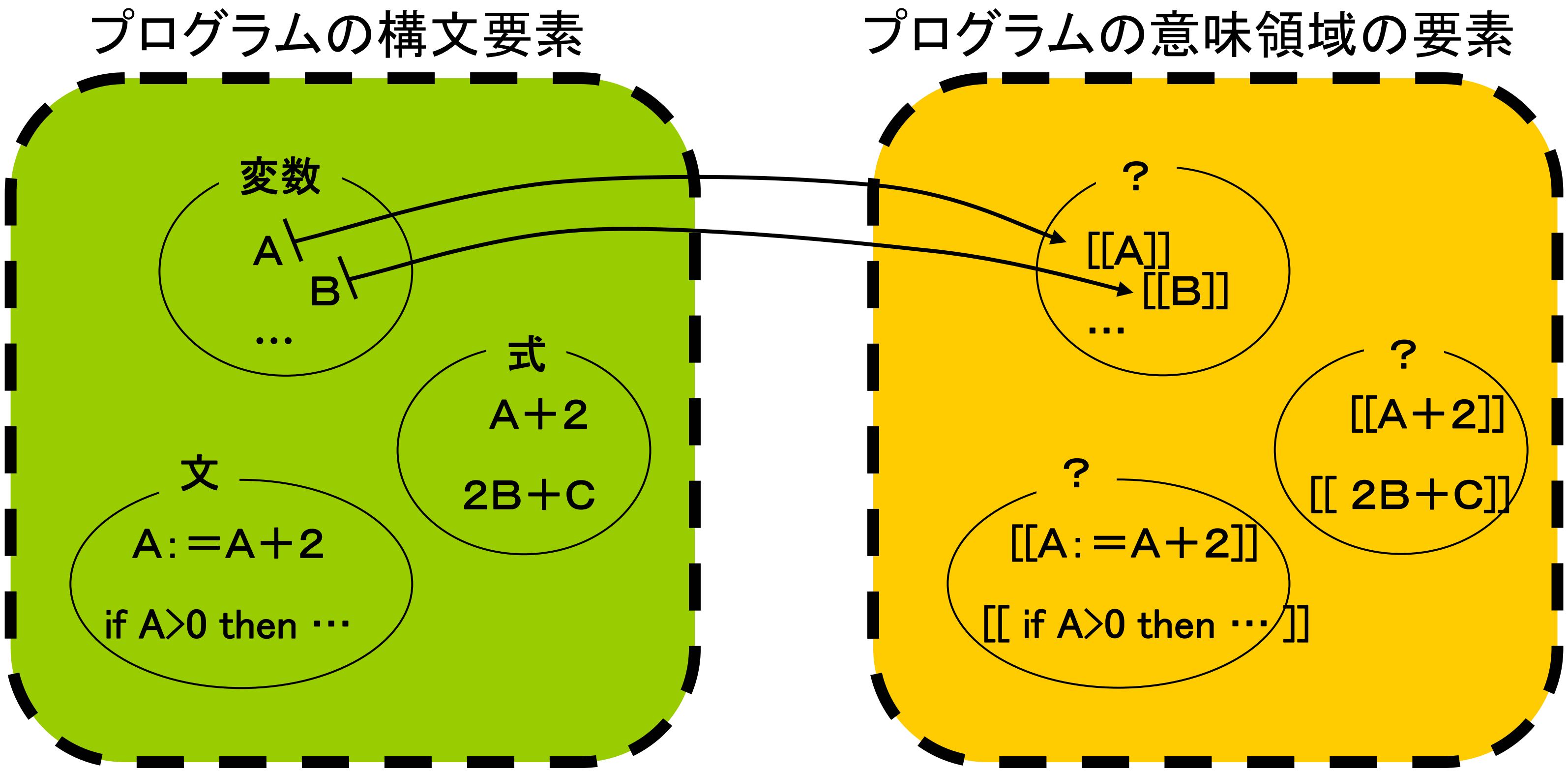
プログラムの意味論と検証(2)

表示的意味論

担当:犬塚

表示的意味論
denotational semantics

- 表示的意味論では、プログラムの要素とそれが意味するものを対応付ける。



表示 denote, denotation

- 構文要素が意味として指し示しているものを、その要素の表示(denotation)あるいは表示的意味(denotational meaning)あるいは外延的意味(extensional meaning)という。
- たとえば、

  「宵の明星」という語は、太陽系の第二惑星を表示する。

  「赤」という語は、集合{トマト、イチゴ、社会主義国の旗、…}を表示する。
- これと同じように、while X>0 do… のようなプログラムが表示するものを、言い当てることで意味をはっきりさせるのが表示的意味論(denotational semantics)。

対象言語＝プログラミング言語 little

Whileプログラムでも取り扱いが困難なので、もう少し小さな次の構文の言語 little を考える。

- 変数　::＝　A | B | ･･･ | Z
- 式　　::＝　0 | 変数 | succ 式
- 文　　::＝　変数:＝式 | begin 文;文 end
　　　　　　　| for 式 times do 文 od

  - 上のfor文は決まった回数(式 times)だけ文を繰り返す構文。
  - Whileは繰り返し回数が分からない、また条件式という構文要素が増えるのでここでは簡単にするため排除した（ifも同様）

準備

- 集合演算として新たな標記を1つ導入する。

- 集合A、Bに対して、定義域をA、値域をBとするすべての写像の集合を$A \to B$とかく。

  $A \to B = \{ f \mid f: A \to B \}$

例　$A=\{1,2,3\}$,　$B=\{0,1\}$としたとき、

$|A \to B| = |B|^{|A|} = 2^3 = 8$

$|(A \times A) \to B| = |B|^{|A \times A|} = 2^9 = 512$

プログラム要素の表示の例

- 構文要素 α に対して、その表示(意味)を $[\![\alpha]\!]$ と書く。
- 括弧 $[\![\quad]\!]$ は、表示的意味論で意味を表すのが習慣。

- 例
  - $[\![1]\!] = \mathit{1}.$ 　構文的な1と、数の1の区別をするため数のときは、斜字体とする。
  - $[\![1+2]\!] = \mathit{3}.$

プログラムの意味領域

- 意味的対象として次の2種類（意味的領域; semantic domain）を考える。
  - 自然数の集合　N
  - 環境の集合　　S
    - 環境とは名前からそれが意味するものへの対応であった。
    - ここでは簡単のため変数名とその値の対応のみ考える。
    - ここではプログラムは自然数のみ扱うものとする。

意味領域と構文要素

- 意味領域（N＝自然数の集合、S＝環境の集合）によって、構文要素の意味の領域が定まる。
- 変数

  変数は環境を1つ決めると、その環境における変数の値を決める。 S→Nというタイプの写像。
- 式

  式も環境を1つ決めると、その環境において変数の意味が定まり、式の値が決まる。 S→Nというタイプの写像。
- 文

  文はその実行によって計算機の内部状態（＝環境）が変わる。つまり、 S→Sというタイプの写像。

意味関数

- すべての式の集合をEXP、
  すべての文の集合をCMDと書くことにする。

このとき、
各e∈EXPに意味を与える写像 $\mathcal{E}$ 、
各c∈CMDに意味を与える写像 $\mathcal{C}$ を与えたい。

$\mathcal{E}$:　EXP　→　(S → N)
$\mathcal{C}$:　CMD　→　(S → S)

それぞれ写像した値を、
$\mathcal{E}[\![e]\!]$,　$\mathcal{C}[\![c]\!]$と表す。

$\mathcal{E}$の定義

- 任意の環境 σ に対して、写像 $\mathcal{E}$ を次のとおり定める。

1. $\mathcal{E}[\![0]\!](\sigma) = 0$
2. $\mathcal{E}[\![v]\!](\sigma) = \sigma(v)$　　vはある変数
3. $\mathcal{E}[\![\mathrm{succ}\ e]\!](\sigma) = \mathcal{E}[\![e]\!](\sigma) + 1$　　eはある式

例　σ を変数x，yに 5、10 を対応させる環境とする。

これを　$\sigma = \{x \mapsto 5,\ y \mapsto 10\}$ と書くことにする。

すると、

$$\mathcal{E}[\![\mathrm{succ}\ x]\!](\sigma) = \mathcal{E}[\![x]\!](\sigma) + 1$$

$$= \sigma(x) + 1 = 5 + 1 = 6$$

$\mathcal{C}$ の定義

- 任意の環境 σ に対して、写像 $\mathcal{C}$ を次のとおり定める。

1. $\mathcal{C}[\![\text{v:=e}]\!](\sigma)$

   $= \text{update}(\sigma, \text{v} \longmapsto \mathcal{E}[\![\text{e}]\!](\sigma))$

   update(σ ,v↦*a*)は環境 σ 中の変数vへの割当てのみv↦*a*に変更した結果を返す。

2. $\mathcal{C}[\![\text{begin } c_1; c_2 \text{ end}]\!](\sigma)$

   $= \mathcal{C}[\![c_2]\!](\mathcal{C}[\![c_1]\!](\sigma))$

3. $\mathcal{C}[\![\text{for e times do c od}]\!](\sigma)$

   $= \text{iterate}(\mathcal{C}[\![\text{c}]\!], \mathcal{E}[\![\text{e}]\!](\sigma), \sigma)$

   iterate(*c*,*a*, σ)は σ に c を *a* 回施した結果を $\underbrace{\text{c}(\text{c}(\cdots \text{c}}_{a\text{回}}(\sigma)\cdots))$ 返す。

例

プログラム Γ ＝ y:＝succ x

環境　　$\sigma = \{\mathrm{x} \mapsto a, \mathrm{y} \mapsto b\}$　のとき $\mathcal{C}[\![\Gamma]\!](\sigma)$ を求めよ。

$\mathcal{C}[\![\Gamma]\!](\sigma)$ = update(σ, y $\mapsto \mathcal{E}[\![$succ x$]\!](\sigma)$)

ここで

$$\mathcal{E}[\![\text{succ x}]\!](\sigma) = \mathcal{E}[\![\text{x}]\!](\sigma) + 1$$
$$= \sigma(\text{x}) + 1$$
$$= a + 1$$

よって

$\mathcal{C}[\![\Gamma]\!](\sigma)$ ＝ update(σ, y $\mapsto a + 1$)

$= \{\mathrm{x} \mapsto a, \mathrm{y} \mapsto a + 1\}$

例　プログラム Γ ＝ begin y:=succ x; x:=y end

環境　$\sigma = \{\mathrm{x} \mapsto a, \mathrm{y} \mapsto b\}$　のとき $\mathcal{C}[\![\Gamma]\!](\sigma)$ を求めよ。

$\mathcal{C}[\![\mathrm{y:=succ\ x}]\!](\rho) = \mathrm{update}(\rho, \mathrm{y} \mapsto \mathcal{E}[\![\mathrm{succ\ x}]\!](\rho))$

$= \mathrm{update}(\rho, \mathrm{y} \mapsto \rho(\mathrm{x}) + 1)$

つまり、$\mathcal{C}[\![\mathrm{y:=succ\ x}]\!] = \lambda\rho.\mathrm{update}(\rho, \mathrm{y}, \rho(\mathrm{x}) + 1)$

同様に、

$\mathcal{C}[\![\mathrm{x:=y}]\!](\rho) = \mathrm{update}(\rho, \mathrm{x} \mapsto \mathcal{E}[\![\mathrm{y}]\!](\rho)) = \mathrm{update}(\rho, \mathrm{x} \mapsto \rho(\mathrm{y}))$

つまり、$\mathcal{C}[\![\mathrm{x:=y}]\!] = \lambda\rho.\mathrm{update}(\rho, \mathrm{x} \mapsto \rho(\mathrm{y}))$

よって

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[\![\Gamma]\!](\sigma) &= \mathcal{C}[\![\mathrm{begin\ y:=succ\ x;\ x:=y\ end}]\!](\sigma) \\
&= \mathcal{C}[\![\mathrm{x:=y}]\!](\mathcal{C}[\![\mathrm{y:=succ\ x}]\!](\sigma)) \\
&= \{(\lambda\rho.\mathrm{update}(\rho, \mathrm{x} \mapsto \rho(\mathrm{y})))\\
&\qquad \{(\lambda\rho.\mathrm{update}(\rho, \mathrm{y} \mapsto \rho(\mathrm{x}) + 1))(\{\mathrm{x} \mapsto a, \mathrm{y} \mapsto b\})\}\}\\
&= \{\lambda\rho.\mathrm{update}(\rho, \mathrm{x} \mapsto \rho(\mathrm{y}))\}(\{\mathrm{x} \mapsto a, \mathrm{y} \mapsto a+1\}) \\
&= \{\mathrm{x} \mapsto a+1, \mathrm{y} \mapsto a+1\}
\end{aligned}$$

例 プログラム Γ ＝for x times y:=succ succ y odと環境 $\sigma = \{x \mapsto a, y \mapsto b\}$ のとき $\mathcal{C}[\![\Gamma]\!](\sigma)$ を求めよ。

$\mathcal{C}[\![\Gamma]\!](\sigma) = \text{iterate}(\mathcal{C}[\![\text{y:=succ succ y}]\!], \mathcal{E}[\![\text{x}]\!](\sigma), \sigma)$

$\mathcal{E}[\![\text{x}]\!](\sigma) = \sigma(\text{x}) = \{\text{x} \mapsto a, \text{y} \mapsto b\}(\text{x}) = a$

$\mathcal{C}[\![\text{y:=succ succ y}]\!](\rho)$

$= \text{update}(\rho, \text{y} \mapsto \mathcal{E}[\![\text{succ succ y}]\!](\rho))$

$= \text{update}(\rho, \text{y} \mapsto \rho(\text{y}) + 2)$

$\mathcal{E}[\![\text{succ succ y}]\!](\rho) = \mathcal{E}[\![\text{succ y}]\!](\rho) + 1$

$= (\mathcal{E}[\![\text{y}]\!](\rho) + 1) + 1 = (\rho(\text{y}) + 1) + 1 = \rho(\text{y}) + 2$

$\mathcal{C}[\![\Gamma]\!](\sigma) = \text{iterate}(\lambda\rho.\text{update}(\rho, \text{y} \mapsto \rho(\text{y}) + 2), a, \sigma)$

$= \{(\lambda\rho.\text{update}(\rho, \text{y} \mapsto \rho(\text{y}) + 2)) \cdots$

$\{(\lambda\rho.\text{update}(\rho, \text{y} \mapsto \rho(\text{y}) + 2))$

$\{(\lambda\rho.\text{update}(\rho, \text{y} \mapsto \rho(\text{y}) + 2))(\{\text{x} \mapsto a, \text{y} \mapsto b\})\}\} \cdots\}$

$= \{(\lambda\rho.\text{update}(\rho, \text{y} \mapsto \rho(\text{y}) + 2)) \cdots$

$\{(\lambda\rho.\text{update}(\rho, \text{y} \mapsto \rho(\text{y}) + 2))(\{\text{x} \mapsto a, \text{y} \mapsto b+2\})\} \cdots\}$

$= \{\text{x} \mapsto a, \text{y} \mapsto b + 2a\}$

練習

環境 $\sigma = \{x \mapsto a\}$に対し、次のプログラムの意味を与えよ。

- $\Gamma_1 =$

  x:=succ succ succ x

- $\Gamma_2 =$

  begin x:=succ x ; x:=succ x ; od

- $\Gamma_3 =$

  for x times do

      for x times do x:=succ x od

  od

まとめ

- 表示的意味論は、プログラムの構文要素に直接その意味（＝数学的対象）を割り当てる。
- そのための関数を定義するのが目的。
- 次回は再帰的プログラムに意味を与える。